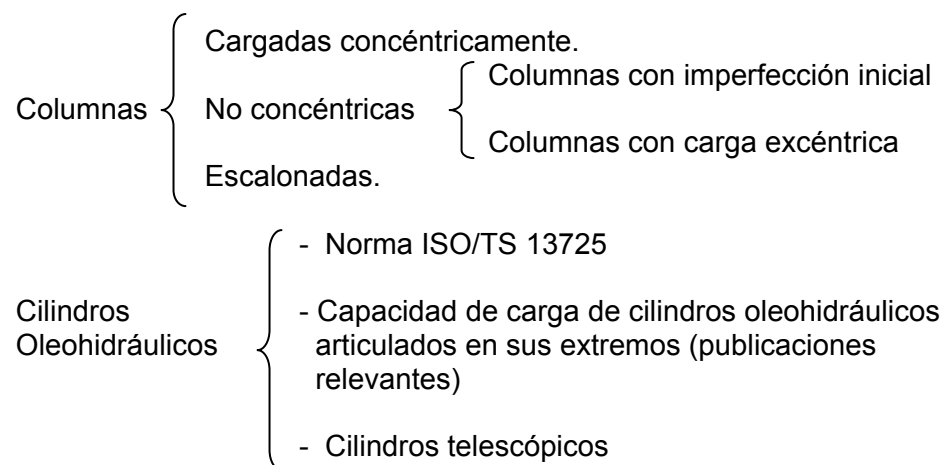


2. ESTADO DEL ARTE

Si queremos profundizar en el análisis de capacidad de carga de cilindros oleohidráulicos deberíamos analizar en detalle los conceptos implícitos en el fenómeno de pandeo de columnas (fenómeno de inestabilidad) y en el comportamiento real de elementos estructurales sometidos a cargas de compresión y flexión.

Ante la falta de un modelo eficaz para el cálculo de la capacidad de carga de los cilindros hidráulicos, la mayoría de fabricantes han optado por utilizar un modelo simple y muy conservador que se fundamenta en suponer que el comportamiento a pandeo de un cilindro hidráulico es equivalente al pandeo de una columna rígida de longitud igual a la longitud total del cilindro hidráulico y momento de inercia igual al momento de la sección transversal del vástago.

El presente capítulo se desarrollará de acuerdo con el siguiente esquema:



2.1 PANDEO DE COLUMNAS

Euler (1744) fue el primero en estudiar el fenómeno del pandeo encontrando la carga crítica de una barra homogénea sometida a compresión. A partir de ese momento diversos autores han realizado estudios teóricos y experimentales en relación a este fenómeno. La Tabla 2.1 resume diversos trabajos en relación al pandeo de columnas.

año	Autor	Publicación	Síntesis resultados
1744	EULER (1707-1783)	"Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes...", apéndice I, "De curvis elasticis," Bousquet, Lausana y Ginebra, 1744.	Estudios pioneros en pandeo; determina la carga crítica de columnas ideales. $P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$, y analiza bajo distintas condiciones de soporte.
1845	A.H.E Lamarle (1806-1875)	"Mémoire sur la flexion du bois," <i>Annales des Travaux Publiques de Belgique</i> , parte 1, vol. 3, 1845, págs. 1-36.	Señala que la fórmula de Euler se debe usar para relaciones de esbeltez mayores a cierto límite, y que debe experimentarse para columnas con relaciones menores.
1889	A.G. Considère (1841-1914)	"résistance des pièces comprimées," <i>Congrès international des Procédés de Construction</i> , Paris. Septiembre 9-14, 1889.	Primeros ensayos en columnas. Las tensiones sobre el lado cóncavo de la columna se incrementan con E_t y las tensiones sobre el lado convexo disminuyen con E . Mostró la no aplicabilidad de Euler al pandeo inelástico y estableció que el módulo reducido tenía un valor entre E y E_t .
1889	F. Engesser 1848-1931	"Ueber die Knickfestigkeit gerader Stäbe," <i>Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen</i> , vol. 35, No.4, 1889, págs. 455-462.	Sugiere la teoría del módulo de elasticidad tangente. Denota el módulo tangente como $T = d\sigma/d\varepsilon$ y propone usar T en lugar de E en la ecuación de Euler para carga crítica. La teoría de módulo tangente se considera también teorema de Engesser.
1895		"Knickfragen," <i>Schweizerische Bauzeitung</i> , vol. 25, No. 13, marzo 30/1895, págs, 88-90.	
1895	F.S. Jasinsky 1856 - 1899	"Noch ein Wort zu den 'Knickfragen,'" <i>Schweizerische Bauzeitung</i> , vol. 25, No. 25, 22 junio/1895, págs. 172-175.	Señala que la teoría de Engesser era incorrecta; hace notar el trabajo de Considère y presenta la teoría del módulo reducido. Establece que el módulo reducido no podía calcularse a nivel teórico.
1895	F. Engesser	"Ueber Knickfragen," <i>Schweizerische Bauzeitung</i> , vol. 26, No. 4, Julio 27, 1895, págs. 24-26.	Reconoce el error en teoría del módulo tangente y mostró cómo calcular el módulo reducido para cualquier sección transversal. Teoría del módulo reducido se conoce también como teoría de Considère-Engesser.
1908	Theodore von Kármán (1881 - 1963)	"Die Knickfestigkeit gerader Stäbe," <i>Physikalische Zeitschrift</i> , vol. 9, No. 4, 1908, págs. 136-140	Presenta teoría del módulo reducido (independiente de los demás). Obtiene las fórmulas para E_r de secciones rectangulares e idealizadas doble T (sin alma). Involucra efectos de excentricidades de la carga de pandeo y muestra que la carga máxima disminuye con rapidez con el aumento de la excentricidad.
1910		"Untersuchungen über Knickfestigkeit," <i>Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Verein Deutscher Ingenieure</i> , berlin, Heft 81, 1910.	
1956		<i>Collected Works of Theodore von Kármán</i> , vols.I-IV, Butterwoths Scientific Publications, londres, 1956.	
1946	Shanley (1904-1968)	"The column paradox," <i>Journal of the Aeronautical Sciences</i> , vol. 13, No. 12, diciembre 1946, pág 678.	Señala paradojas lógicas en teoría de módulo tangente y módulo reducido y propone una teoría para resolverlas.
		"Inelastic column theory," <i>ibid.</i> , vol.14 No. 5, mayo de 1947, págs.261-267.	Presenta análisis adicionales y resultados en pruebas de columnas que apoyan su teoría.

Tabla 2.1. Síntesis histórica, estudios en pandeo de columnas [1]

2.1.1 Columnas cargadas concéntricamente

Para entender por qué las columnas se pandean, primero es necesario entender los regímenes de equilibrio. Cuando la carga axial concéntrica P aplicada a una columna (Fig. 2.1) tiene un valor pequeño, la columna permanece perfectamente recta y sufre compresión axial directa. Las únicas tensiones son las de compresión uniforme ($\sigma = P/A$). La columna está en **equilibrio estable**, lo que significa que vuelve a su posición recta después de una perturbación.

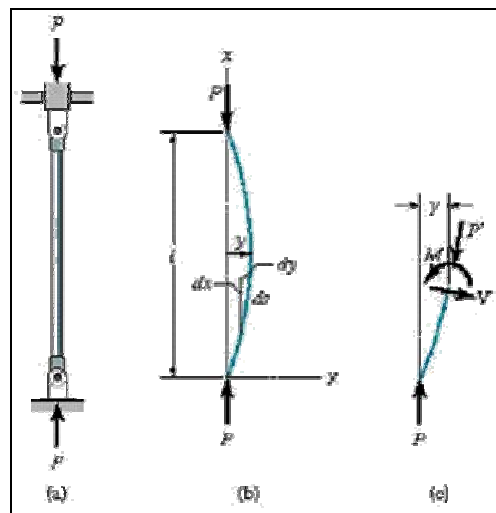


Fig. 2.1. Columna con extremos articulados sometida a compresión, a) ensamble; b) forma de la deformación; c) carga actuante.

Al incrementar gradualmente la carga axial P , se alcanza una condición de **equilibrio neutro** en que la columna puede tener una forma flexionada; el valor correspondiente a la carga, es la carga crítica **P_{cr}** . Con esta carga la columna puede sufrir pequeñas deflexiones laterales sin cambios en la fuerza axial; una pequeña carga lateral producirá una forma flexionada que no desaparece cuando se elimina la carga lateral. La carga crítica puede mantener la columna en equilibrio ya sea en posición recta o en una posición un tanto flexionada.

A valores mayores de la carga, la columna es **inestable** y puede fallar por pandeo; es decir por flexión excesiva. Para el caso ideal, la columna estará en equilibrio en posición recta aún cuando la carga axial P sea mayor que la carga crítica; sin embargo, la mínima perturbación ocasionará que la columna se flexione en sentido lateral. Una vez esto pasa, las deflexiones aumentan de inmediato y la columna falla por pandeo. En resumen:

Si $P < P_{cr}$ la columna está en equilibrio estable en posición recta.

Si $P = P_{cr}$ la columna está en equilibrio neutro en posición recta o ligeramente flexionada.

Si $P > P_{cr}$ la columna está en equilibrio inestable en posición recta y se pandeará ante la más pequeña perturbación.

a) Pandeo Elástico

En la Fig. 2.1 se presenta una columna cargada concéntricamente con sus extremos articulados. En una columna como ésta sus extremos se mantienen en posición, pero son libres de girar. Suponga que la columna es recta inicialmente y que la carga es concéntrica, como se representa en la Fig. 2.1(a). En la Fig. 2.1(c) se muestra un diagrama de cuerpo libre de las cargas que actúan sobre la columna.

El comportamiento de columnas esbeltas cargadas concéntricamente fue estudiado hace más de 200 años por Leonhard **Euler**, quien estableció, a partir de la solución de la ecuación diferencial de momento flector para la columna en el estado de equilibrio neutro, la carga límite a partir del cual estos elementos fallan por pandeo, así:

$$\text{Ecuación de momento flector (Fig. 2.1):} \quad EI \frac{d^2y}{dx^2} = M = -P \cdot y \quad (2.1)$$

Haciendo $k^2 = P/EI$, se tiene $y'' + k^2y = 0$, cuya solución tiene la forma:

$$y = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx) \quad (2.2)$$

De condiciones de contorno en los extremos de la columna: $y(0) = 0$, $y(L) = 0$, resulta:

$$\begin{aligned} C_2 &= 0, & y &= C_1 \text{ sen } kx \\ C_1 \text{ sen } kL &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

La ecuación no trivial conocida como ecuación de pandeo es entonces: $\text{sen } kL = 0$.

La solución de interés será $kL = n\pi$, con $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{De esta forma se tiene} \quad P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \quad (2.4)$$

La menor carga crítica para una columna con extremos articulados (Fig. 2.1(a))

es entonces:

$$P = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.5)$$

En la práctica se encuentran otras condiciones de extremos como empotrados y libres. Las cargas críticas para columnas con diferentes tipos de condiciones en los extremos se determinan con la ecuación diferencial de la curva de deflexión, de igual forma que el caso analizado anteriormente.

Al aplicar las condiciones de contorno respectivas y resolviendo en cada caso, se encuentra que una expresión general de la carga crítica para todas las columnas es:

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \quad (2.6)$$

Conocida como la carga crítica de Euler. La longitud equivalente de una columna es la distancia entre puntos de inflexión (puntos de momento cero) en su curva de deflexión, suponiendo que la curva se extiende (en caso necesario) hasta que se alcanzan puntos de inflexión (Fig. 2.2).

La Fig. 2.2 muestra la longitud equivalente L_e , para columnas con diversos tipos de condiciones de soporte.

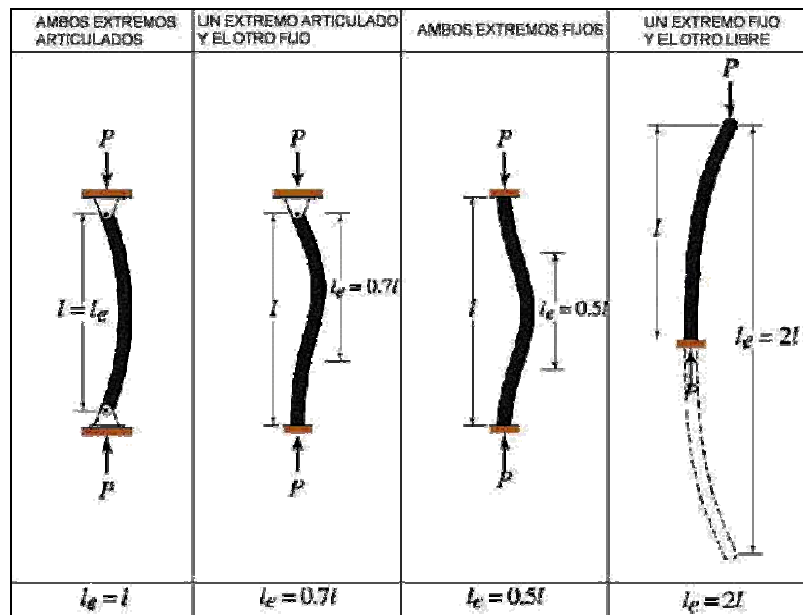


Fig. 2.2. Longitud equivalente para columnas con distintas condiciones en los extremos

La Tabla 2.2 resume de una manera sintética, la forma de obtención de estas longitudes equivalentes, de acuerdo a las condiciones de soporte, desarrollando las formulaciones a partir de las ecuaciones de equilibrio en cada caso.

Con frecuencia interesa definir la tensión crítica de una columna, que en este caso definiremos como tensión de Euler σ_E y viene dada por la ecuación (2.7).

$$\sigma_E = \sigma_{cr} = \frac{P_E}{A} = \frac{\pi^2 E}{\left(L_e/r_g\right)^2} \quad (2.7)$$

En donde la relación L_e/r_g se conoce como la **relación de esbeltez** y $r_g = \sqrt{I/A}$ el radio de giro de la columna. La tensión crítica σ_{cr} es una tensión promedio en la columna, momentos antes de que pandee. Esta tensión es elástica y, para un módulo de elasticidad constante, es aplicable solo hasta el límite proporcional del material.

	Empotrado - libre (fijo-libre)	Empotrado - empotrado (fijo-fijo)	Empotrado - articulado (fijo - apoyo simple)
Esquema Para todos: $k^2 = P/EI$			
Momento flector a una distancia x de la base	$M = P(\delta - y) = Ely''$	$M = -Py = Ely''$	$M_0 = RL$ $M = M_0 - Py - Rx = -Py + R(L - x) = Ely''$
Ecuación diferencial	$y'' + k^2y = k^2\delta$	$y'' + k^2y = 0$	$y'' + k^2y = \frac{R}{EI}(L - x)$
Solución general $v = v_H + v_P$	$y = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \operatorname{cos} kx + \delta$	$y = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \operatorname{cos} kx$	$y = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \operatorname{cos} kx + \frac{R}{P}(L - x)$
Condiciones de contorno	$y(0) = 0, y'(0) = 0, y(L) = \delta$	$y'(0) = 0, y'(L/2) = 0$	$y(0) = 0, y'(0) = 0, y(L) = 0$
Expresiones generadas	$C_2 = -\delta, C_1 = 0$ $\delta \operatorname{cos} kL = 0$ $\operatorname{cos} kL = 0$	$C_1 = 0, -kC_2 \operatorname{sen} kL/2 = 0$	$C_2 + RL/P = 0, C_1k - R/P = 0, C_1 \operatorname{tan} kL + C_2 = 0$ $C_1kL + C_2 = 0, \text{ o } C_2 = -C_1kL$ $kL = \operatorname{tan} kL$
Solución	$kL = \frac{n\pi}{2}, n = 1, 3, 5, \dots$	$kL/2 = n\pi, n = 1, 2, 3, \dots$	$kL = 4.4934$
Carga crítica mínima (n=1)	$P_E = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$P_E = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$	$P_E = \frac{2.046\pi^2 EI}{L^2}$
Longitud equivalente L_e	$L_e = 2L$	$L_e = 0,5L$	$L_e = 0,7L$

Tabla 2.2 Determinación de las longitudes equivalentes de columnas según condiciones en extremos

b) Pandeo Inelástico

El pandeo inelástico ocurre cuando las columnas pasan del límite proporcional del material. La curva o hipérbola de Euler (Fig. 2.3) es válida solo en la región ST , donde la tensión está debajo del límite proporcional del material σ_{pl} . El valor de relación de esbeltez arriba de la cual la curva de Euler es válida se obtiene igualando la tensión crítica (2.7) a la tensión proporcional σ_{pl} . Así la relación de esbeltez crítica está dada por (2.8).

$$\left(\frac{L_e}{r_g}\right)_c = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pl}}} \quad (2.8)$$

Las columnas cortas (Fig. 2.3), fallan por fluencia y aplastamiento del material sin que intervengan consideraciones de pandeo o estabilidad. En tal caso, se define una tensión de compresión última σ_{ult} como la tensión de falla del material, la cual establece un límite de resistencia (línea QR). Las columnas intermedias (RS) fallan por pandeo inelástico, lo cual significa que las tensiones máximas están arriba del límite proporcional cuando se presenta el pandeo. Como se rebasa el límite proporcional la pendiente de la curva tensión - deformación es menor que el módulo de elasticidad de la zona proporcional E . Las columnas largas (ST) fallarán por pandeo elástico o pandeo de Euler (2.8).

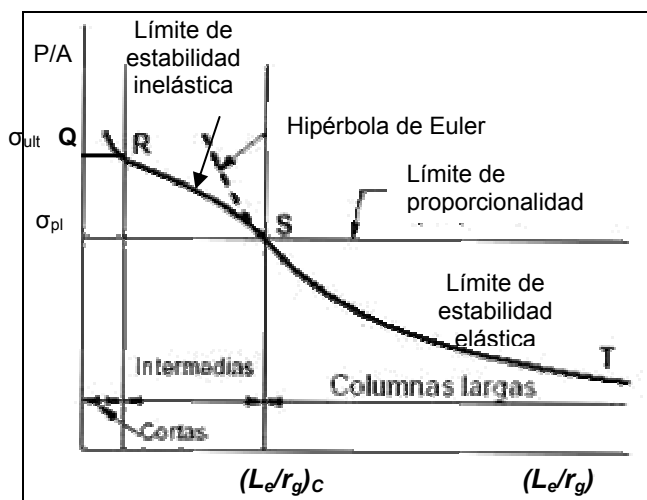


Fig. 2.3. Comportamiento de la carga de Euler en función de la relación de esbeltez

En la zona inelástica del material, la tensión crítica (2.7) puede ser calculada modificando el módulo de elasticidad E . En esta zona se aplican varias teorías[1]

como del módulo tangente, la cual define un nuevo valor E_t como $d\sigma/d\varepsilon$ de la curva tensión-deformación del material. Este valor por consiguiente no es constante y es menor que el módulo elástico E . De igual manera se plantean otras teorías como del módulo reducido E_r , donde $E_t < E_r < E$, y teoría de Shanley (descritas con suficiencia en referencia [1]).

2.1.2 Columnas no concéntricas¹

2.1.2.a Columnas con excentricidad en la aplicación de la carga

Las aplicaciones de las columnas rara vez tienen la carga aplicada alineada de manera coincidente con el eje centroidal de la sección transversal. A la distancia entre los dos ejes se le denomina excentricidad y se designa como e (Fig. 2.4.a).

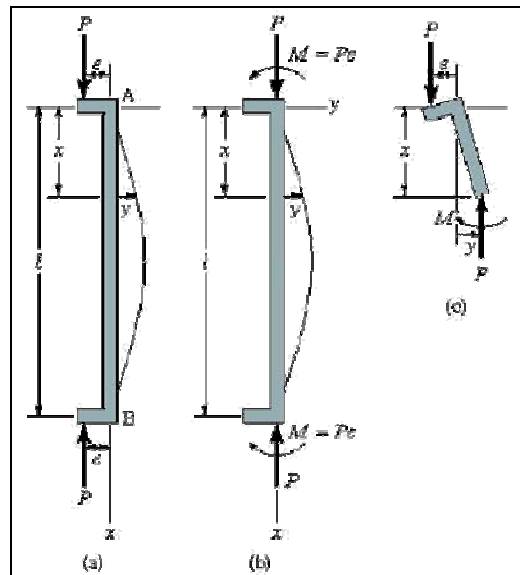


Fig. 2.4. Columna cargada excéntricamente. a) excentricidad, b) momento flexionante, c) diagrama del cuerpo libre a través de una sección arbitraria

En la Fig. 2.4(a) se muestra una columna con los extremos articulados, sujeta a unas fuerzas que actúan a una distancia e de la línea central de la columna no deformada. Se supone que a la columna se le aplica una carga a una distancia corta excéntrica, desde el centroide de la sección transversal. Esta carga en la columna es estáticamente equivalente a la carga axial y al momento flexionante $M = P e$, como se presenta en la Fig. 2.4(b). Cuando se consideran columnas

¹ No concéntricas se refiere a columnas cuya línea de acción de la carga aplicada no coincide inicialmente, con el centroide de la sección transversal.

cargadas concéntricamente se suponen deflexiones pequeñas y un comportamiento elástico lineal. La tensión máxima de esta columna está definida por (2.9) [1].

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{e \cdot c}{r_g^2} \sec \left(\frac{l}{2r_g} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right) \right] \quad (2.9)$$

La ecuación (2.9) es conocida como **fórmula de la secante**. El parámetro $e \cdot c / r_g^2$ se denomina razón de excentricidad.

En la Fig. 2.5 se muestra el efecto de la razón de esbeltez sobre la tensión normal P/A para una columna cargada excéntricamente [expresión (2.9)]. Las curvas de la figura indican que las diferencias en la razón de excentricidad tienen un efecto significativo sobre la tensión en la columna cuando la razón de esbeltez es pequeña. Por otro lado, las columnas con grandes razones de esbeltez tienden a fallar en la carga de Euler sin importar la razón de excentricidad.

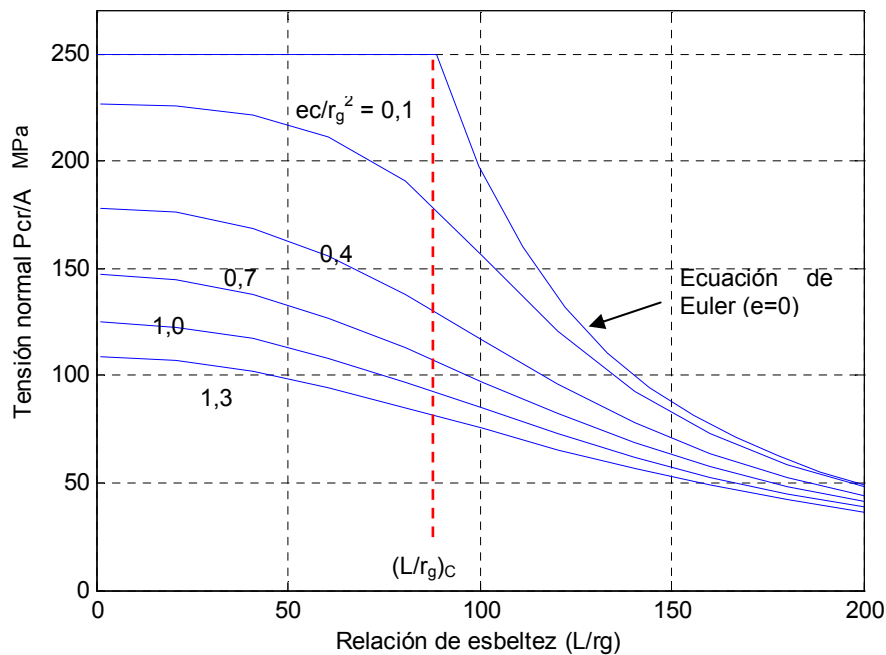


Fig. 2.5. Variación de la tensión con la relación de esbeltez para distintas razones de excentricidad ($E = 2 \times 10^{11}$ Pa y $\sigma_{\max} = 250$ MPa).

Las curvas registradas corresponden a una columna de diámetro 30mm cuyas excentricidades son 0,375 – 1,5 – 2,625 – 3,75 – 4,875 mm respectivamente. La tensión normal graficada corresponde a la relación P_{cr}/A . Esta carga P_{cr} en este

caso genera una tensión máxima de 250 MPa. Para excentricidad nula (carga concéntrica) corresponde la ecuación de Euler. Otros autores han planteado expresiones para el caso de columnas cargadas excéntricamente.

Walker [7] propone para columnas articuladas en sus extremos, una expresión para el cálculo de la tensión crítica P_{cr}/A [σ_{cr} en (2.10)] donde P_{cr} generaría en la columna una tensión de fluencia σ_y .

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right) \xi} \left\{ 0.5 [\sigma_y + (1 + \xi) \sigma_E] - \sqrt{0.25 [\sigma_y + (1 + \xi) \sigma_E]^2 - \sigma_y \sigma_E} \right\} \quad (2.10)$$

donde $\xi = e.c/r_g^2$, σ_E es la tensión de Euler y σ_y es la tensión de fluencia del material.

2.1.2.b Columnas con imperfección inicial (Fig. 2.6)

De igual manera Walker [7] plantea la expresión (2.11) para la tensión σ_{cr} , considerando que las columnas tienen una imperfección inicial máxima b_1 (Fig. 2.6) (antes de ser cargadas).

$$\sigma_{cr} = 0.5 [\sigma_y + (1 + \eta) \sigma_E] - \sqrt{0.25 [\sigma_y + (1 + \eta) \sigma_E]^2 - \sigma_y \sigma_E} \quad (2.11)$$

donde $\eta = \frac{b_1 c}{r_g^2}$

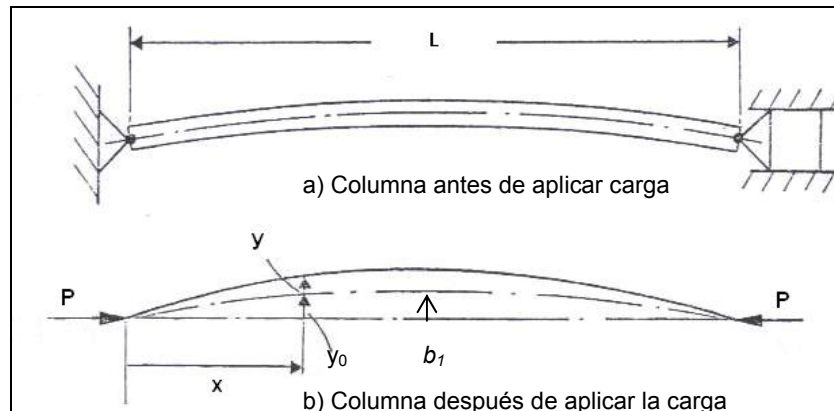
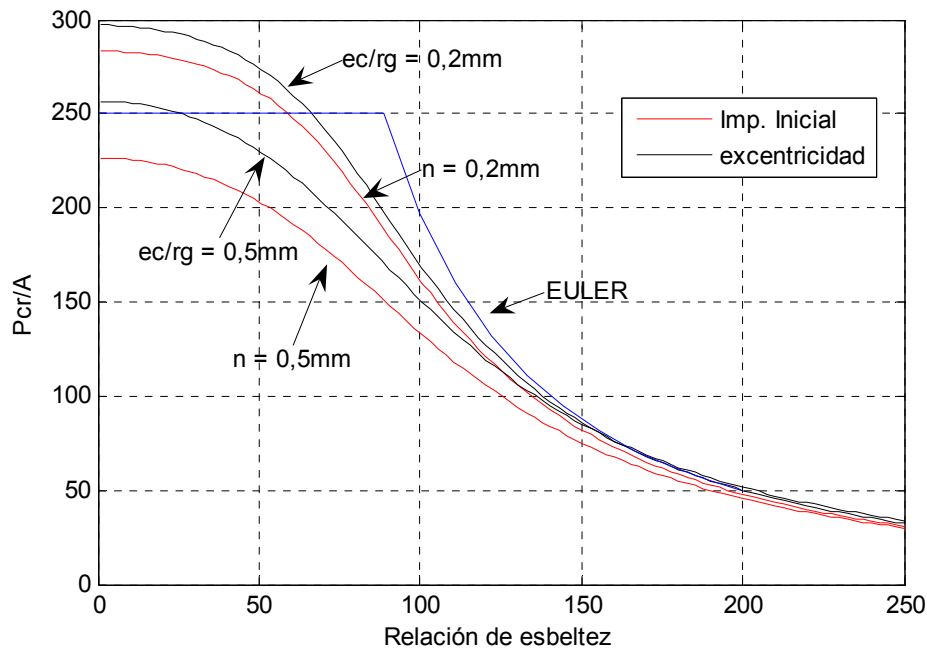


Fig. 2.6 Columna con imperfección inicial.

Walker [7] afirma que para otras condiciones de soporte se podrán emplear las ecuaciones anteriores, cambiando la longitud equivalente correspondiente.

La Fig. 2.7 presenta comparativamente las curvas de Walker [7] con relación a Euler, involucrando excentricidad (2.10), e imperfección inicial (2.11) con variaciones de ξ y η respectivamente. Por efectos comparativos se ha tomado

como tensión admisible en todas las curvas, la tensión de fluencia, con un valor de 340MPa (dato razonable para un acero común).



**Fig. 2.7. Efectos de la excentricidad e imperfección inicial en columnas con relación a Euler según formulaciones de Walker [7].
Curvas ecuaciones (2.10) y (2.11), con η y $\xi = 0.2$ y 0.5**

Para $\eta = \xi = 0$, se genera la carga de Euler, en donde la relación de esbeltez crítica (límite de aplicación de Euler) lo define la tensión proporcional: $\pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{pl}}}$.

Para los mismos valores de η y ξ , ó lo que es lo mismo b_1 y e , a una carga aplicada, la Fig. 2.7 muestra que la imperfección inicial genera un efecto más crítico sobre la columna que la excentricidad. Con el aumento de ambos parámetros, es notable el efecto desfavorable sobre la capacidad de carga de la columna (La carga crítica disminuye).

La Tabla 2.5 resume las formulaciones planteadas por diversos autores para la tensión crítica $\sigma_{cr} = P_{cr}/A$ en función de la relación de esbeltez de una columna de 30mm de diámetro y las compara mediante un gráfico. Para efectos comparativos, las curvas de la secante son determinadas con base en una tensión admisible equivalente a la tensión de fluencia. Los valores de tensiones tomados son: $\sigma_Y = 340$ MPa, $\sigma_{pl} = 250$ MPa.

Autor	Expresiones para tensión crítica	Rango de aplicación	Curvas Resultado de análisis teóricos
EULER	$\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L_e}{r_g}\right)^2} \quad \left(\frac{L_e}{r_g}\right)_c = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{pl}}}$	Elástico - lineal $\frac{L_e}{r_g} > \left(\frac{L_e}{r_g}\right)_c$	
Secante (Timoshenko [1])	$\sigma_{pl} = \sigma_Y = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{e \cdot c}{r_g^2} \sec \left(\frac{l}{2r_g} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right) \right]$	Elástico e inelástico	
Walker [7] (con deformación inicial)	$\sigma_{cr} = 0.5 [\sigma_Y + (1 + \eta) \sigma_E] - \sqrt{0.25 [\sigma_Y + (1 + \eta) \sigma_E]^2 - \sigma_Y \sigma_E}$ $\eta = \frac{b_1 c}{r_g^2}, \quad b_1: \text{deflexión inicial}$	Elástico e inelástico	
Walker [7] (con carga excéntrica)	$\sigma_{cr} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right) \xi} \left\{ \begin{array}{l} 0.5 [\sigma_Y + (1 + \xi) \sigma_E] \\ - \sqrt{0.25 [\sigma_Y + (1 + \xi) \sigma_E]^2 - \sigma_Y \sigma_E} \end{array} \right\}$ $\xi = \frac{ec}{r_g^2}, \quad e: \text{excentricidad de carga}$	Elástico e inelástico	
Módulo tangente [1]	$\sigma_{cr} = \sigma_t = \frac{\pi^2 E_t}{\left(\frac{L_e}{r_g}\right)^2} \quad E_t < E \quad \left(\frac{L_e}{r_g}\right)_c = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{pl}}}$	No lineal $\frac{L_e}{r_g} < \left(\frac{L_e}{r_g}\right)_c$	
Módulo reducido [1]	$\sigma_{cr} = \sigma_r = \frac{\pi^2 E_r}{\left(\frac{L_e}{r_g}\right)^2} \quad E_t < E_r < E \quad \left(\frac{L_e}{r_g}\right)_c = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{pl}}}$	No lineal $\frac{L_e}{r_g} < \left(\frac{L_e}{r_g}\right)_c$	

Tabla 2.5 Formulaciones basadas en teorías y su rango de aplicación.

2.1.3 Columnas escalonadas (con cambio de sección).

Son varios los autores que han planteado el caso de columnas de sección variable, articulada en sus extremos. (Timoshenko [2], Courbon [8]).

Supóngase una columna de sección variable con apoyos simples (Fig. 2.8) sometida a carga axial.

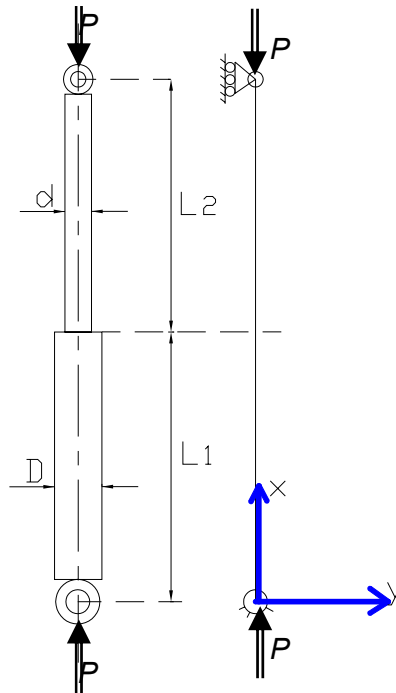


Fig. 2.8. Columna de sección variable

Planteando las ecuaciones de la elástica para ambas secciones y aplicando las condiciones de contorno correspondientes, los autores han obtenido la expresión (2.12) para la carga crítica de pandeo.

$$\frac{\tan(k_1 L_1)}{k_1} + \frac{\tan(k_2 L_2)}{k_2} = 0 \quad (2.12)$$

Donde $k_1 = \sqrt{\frac{P_{cr}}{EI_1}}$ $k_2 = \sqrt{\frac{P_{cr}}{EI_2}}$

L_1 : Longitud de la sección de diámetro mayor.

I_1 : Momento de inercia de la sección transversal de diámetro mayor.

L_2 : Longitud de la sección de diámetro menor.

I_2 : Momento de inercia de la sección transversal de diámetro menor.

E : Módulo de elasticidad del material de la columna (en este caso, supuesto constante para toda la columna).

2.1.4 Estudios experimentales en pandeo de columnas

Si bien los conceptos teóricos son importantes para entender el comportamiento de las columnas, el diseño práctico de columnas debe tomar en cuenta factores no considerados en la teoría; por ejemplo, las columnas de acero siempre contienen tensiones residuales producida por sus procesos de fabricación. Estas tensiones varían considerablemente en diferentes partes de la sección transversal, de manera que el nivel de tensión requerido para producir la fluencia varía sobre toda la sección transversal.

Ya en 1920 se tenían más de 400 referencias de estudio de pandeo entre teórico y experimental [20]. Diversos autores han desarrollado a partir de esa fecha, una serie de planteamientos con base en pruebas experimentales. A continuación se citan algunos [3].

Petrus van Musschenbroek (1729) [19] determinó experimentalmente que la carga de pandeo de una columna es inversamente proporcional al cuadrado de su longitud, resultado que mas tarde fue deducido teóricamente por Euler (1744).

Von Kármán y Prandtl (1907-10) [21] en su disertación doctoral se sugiere 3 grupos de imperfecciones de acuerdo a sus efectos, estudiados durante el siglo 20 (Tabla 2.6).

Efectos	Imperfecciones
Excentricidad	<ul style="list-style-type: none"> • Excentricidad de carga • Variaciones en el módulo de elasticidad • Desigualdad en forma y área de sección transversal • No homogeneidad del material
Curvatura Inicial	<ul style="list-style-type: none"> • Variación en módulo elástico. • Curvatura Inicial
Reducción en Resistencia de materiales	<ul style="list-style-type: none"> • Tensión residual • No homogeneidad del material • Fallas y defectos locales

Tabla 2.6. Imperfecciones en una prueba de pandeo y sus efectos

Para el estudio de la excentricidad Kármán empleó valores de $e = \text{Long de columna}/70$ y $L/150$. Kármán dio importancia a la excentricidad. Trabajó sobre una máquina de pruebas a compresión de 150 T con rango de longitud de 1 m. Empleó probetas con sección transversal del orden de 20 mm x 30 mm. Efectuó pruebas con no más del 20% de la capacidad de la máquina. Esto aseguraba una relativa rigidez de la configuración de la prueba.

En los 60, Kármán diseña una “fijación” que facilita la colocación exacta de la línea de centro de la columna sobre la línea de carga. Permitió el ajuste de posición de la columna bajo carga generando más exactitud de centrado.

Existían dos fuentes de error:

1. Inclusión del fijador rígido en la longitud efectiva.
2. Fricción de bordes filosos en sus bases. Puede incrementar la carga de pandeo medida. Sus resultados en zona elástica se desviaron de *Euler* en menos de 1 – 1.5%, el error no es significativo.

Kármán confirmó que el comportamiento de pospandeo es importante para entender el comportamiento de pandeo.

Para columnas largas, según curvas obtenidas, el comportamiento elástico previsto teóricamente de carga constante con incremento de deflexión es comprobado experimentalmente.

Para columnas cortas, el comportamiento difiere. La carga disminuye muy significativamente con incrementos de deflexión debido a efectos inelásticos. Los efectos inelásticos fueron su principal interés y han sido hasta el presente, el interés de estudio del pandeo.

Walker (1954) [7] realiza pruebas sobre columnas las cuales mostraron que hay una carga última, más allá de la cual la columna no puede sostener un incremento de carga. La Fig. 2.9 indica esquemáticamente que esta carga última es en efecto la carga de pandeo para una columna real, ya que en esta carga un ‘leve golpe’, puede causar cambiar a otra posición bruscamente deformada, con la misma carga.

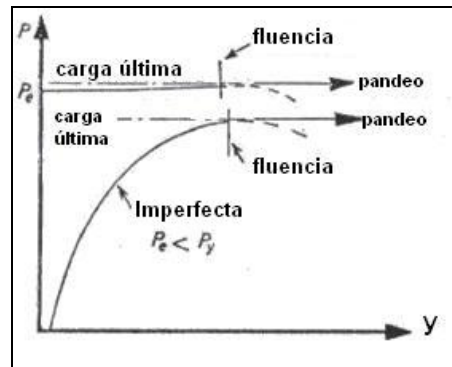


Fig. 2.9. Carga aplicada vs deflexión lateral (pruebas experimentales)

Pruebas experimentales también mostraron que para una columna esbelta (es decir $L_e/r_g > 150$ en una columna de acero estructural típico) la carga última es solo ligeramente más grande que la carga de fluencia, pero una columna poco esbelta ($L_e/r_g < 50$) hecha de un material dúctil tiene una carga última que puede ser significativamente más grande que esta carga (*fluencia* en la figura).

Robertson (1925) [22], (citado por Walker [7]) observó que dada la magnitud de la imperfección en una columna, es posible calcular la tensión crítica (2.11), pero en la práctica hasta que la columna sea construida, la imperfección real no puede ser determinada, y por supuesto, esto es demasiado tarde para influenciar los procesos de diseño de la columna. Para vencer esta dificultad, han sido dirigidas investigaciones hacia la determinación de la variación estadística en columnas experimentales, de las imperfecciones causadas por varios métodos de manufactura.

En 1925 Robertson determina que si la magnitud del parámetro η en (2.11) tenía un valor $\eta = 0.003L/r_g$, entonces la curva resultante describía muy bien el comportamiento de un gran número de pruebas de columnas articuladas en sus extremos. La curva generada es experimental y el valor η no necesariamente tiene relación con la deformación inicial. Esta es conocida como la curva de Perry-Robertson.

J. Dutheil (Walker [7]) propuso que la relación $\eta = \frac{0,3 \sigma_Y}{\pi^2 E} \left(\frac{L}{r_g} \right)^2$ en la expresión (2.11) generaba una mejor descripción de los valores más bajos de las cargas últimas de las columnas.

Von Tetmajer (1903) [23] concuerda con la experimentación, en que la fórmula de Euler sólo es útil para valores de esbeltez (λ) mayores que 100 (levemente mayores al radio de esbeltez crítico). Para λ menores que 100, Tetmajer de acuerdo con la experimentación observó que cargando hasta la rotura piezas de λ variable, los puntos del diagrama $\sigma_{cr} = f(\lambda)$ se encontraban muy aproximadamente sobre una línea recta, llamada **recta de Tetmajer** (ver Tabla 2.7).

Para el acero, la recta de Tetmajer corta el eje de ordenadas $\lambda = 0$ en el punto correspondiente a la tensión comprendida entre 280 y 300 MPa (tensión de rotura, en este caso acero estructural). Como este valor sobrepasa el límite elástico $\sigma_{Elas} = 250$ MPa, se limita la recta Tetmajer al valor de la tensión límite de elasticidad, al que corresponde $\lambda = 60$.

La fórmula de Tetmajer llamada también de la línea recta, para el acero tiene entonces la forma:

$$\sigma_{cr} = \sigma_{Rot} - a \cdot \lambda \quad (2.13)$$

Donde a es un coeficiente numérico deducido por las condiciones límites. El diagrama se cierra con una línea horizontal desde $\lambda = 0$ a $\lambda = 60$. Para el acero dulce por ejemplo, con $\lambda < 100$, $\sigma_{cr} = 300 - 0,8 \cdot \lambda$.

Rankine, con base en experimentación propone, para cualquier valor de λ , que:

$$\sigma_{cr} = \frac{\sigma_{adm}}{1 + a \cdot \lambda^2} \quad (2.14)$$

en donde tanto σ_{adm} a la compresión simple como a son dos constantes que dependen de las características del material.

Para el acero con $\lambda = 70-120$ y $\sigma_{adm} = 140$ MPa, se tiene: $a = (1 - 15) \times 10^{-4}$.

Para la madera con $\sigma_{adm} = 6$ MPa $a = 6 \times 10^{-4}$

Para la fundición con $\sigma_{adm} = 50-100$ MPa $a = (2 - 6) \times 10^{-4}$

En la expresión (2.14) puede observarse que si λ es muy pequeña (vigas cortas), la fórmula se reduce a $\sigma_{cr} = \sigma_{adm}$; y si λ es muy grande, se convierte en

$\sigma_{cr} = \frac{\sigma_{adm}}{a \cdot \lambda^2}$ que tiene la misma forma que la ecuación de Euler.

AISC² [1], Organización técnica que prepara especificaciones para diseñadores de acero estructural (American Institute of Steel Construction), propone ciertas formulaciones para la tensión admisible dividiendo la tensión máxima (crítica) entre el factor de seguridad adecuado. Cuando la relación de esbeltez L/r_g es grande, la tensión máxima se basa en la carga de Euler.

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L_e}{r_g}\right)^2} \quad (2.15)$$

Se tomará L_e para que sea aplicable a diversas condiciones de soportes. Se sabe que la ecuación (2.15) es aplicable cuando las tensiones son menores que el límite proporcional. Las columnas “no ideales” pueden tener tensiones residuales considerables, que pueden ser tan grandes como la mitad de la tensión de fluencia. Para una columna con estas características, el límite proporcional se alcanza cuando la tensión axial σ_{max} debido a la carga de compresión es igual a la mitad de la tensión de fluencia:

$$\sigma_{cr} = 0.5\sigma_y \quad (2.16)$$

Luego, la relación de esbeltez mínima para la cual es aplicable la ecuación (2.15) es:

$$\left(\frac{L_e}{r_g}\right)_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} \quad (2.17)$$

La relación de esbeltez crítica dada por (2.17) determina la frontera entre el pandeo elástico e inelástico de columnas reales (con tensiones residuales).

Luego, de (2.17) y (2.15), para el rango elástico se tiene, en función de la relación de esbeltez:

$$\sigma_{cr} = \frac{\left(\frac{L_e}{r_g}\right)_c^2}{2\left(\frac{L_e}{r_g}\right)^2} \sigma_y \quad \frac{L_e}{r_g} \geq \left(\frac{L_e}{r_g}\right)_c \quad (2.18)$$

Para la región de pandeo inelástico, la tensión máxima está dada por una fórmula parabólica.

$$\sigma_{cr} = 1 - \frac{\left(\frac{L_e}{r_g}\right)^2}{2\left(\frac{L_e}{r_g}\right)_c^2} \sigma_y \quad \frac{L_e}{r_g} \leq \left(\frac{L_e}{r_g}\right)_c \quad (2.19)$$

² Aunque sus formulaciones son aplicadas para acero estructural se han tenido en cuenta como base de comparación en los análisis de columnas de otros tipos de acero.

Estas expresiones son graficadas (Fig. 2.10) en forma $\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_Y}$ vs $\frac{L_e}{r_g}$.

En la Fig. 2.10 se observa que la curva es una parábola con tangente horizontal en $L_e/r_g = 0$, donde $\sigma_{cr} = \sigma_Y$. En la relación de esbeltez crítica, la curva se une suavemente con la curva de Euler (ambas curvas tienen la misma pendiente en este punto). Así la fórmula empírica proporciona una curva de diseño que se ajusta a la forma general de las fórmulas teóricas, además es simple en su uso. La validez de estas expresiones se ha comprobado en numerosas pruebas.

Para obtener las tensiones admisibles a partir de las tensiones críticas, la AISC adoptó las siguientes fórmulas para los factores de seguridad:

$$\nu_1 = \frac{5}{3} + \frac{3(L_e/r_g)}{8(L_e/r_g)_c} - \frac{(L_e/r_g)^3}{8(L_e/r_g)_c^3} \quad \frac{L_e}{r_g} \leq \left(\frac{L_e}{r_g}\right)_c \quad (2.20)$$

$$\nu_2 = \frac{23}{12} \approx 1,92 \quad \frac{L_e}{r_g} \geq \left(\frac{L_e}{r_g}\right)_c \quad (2.21)$$

Así, el factor de seguridad es 5/3 cuando $L_e/r_g = 0$ y aumenta en forma gradual hasta 23/12 cuando $L_e/r_g = (L_e/r_g)_c$. Para relaciones de esbeltez mayores, el factor de seguridad permanece constante.

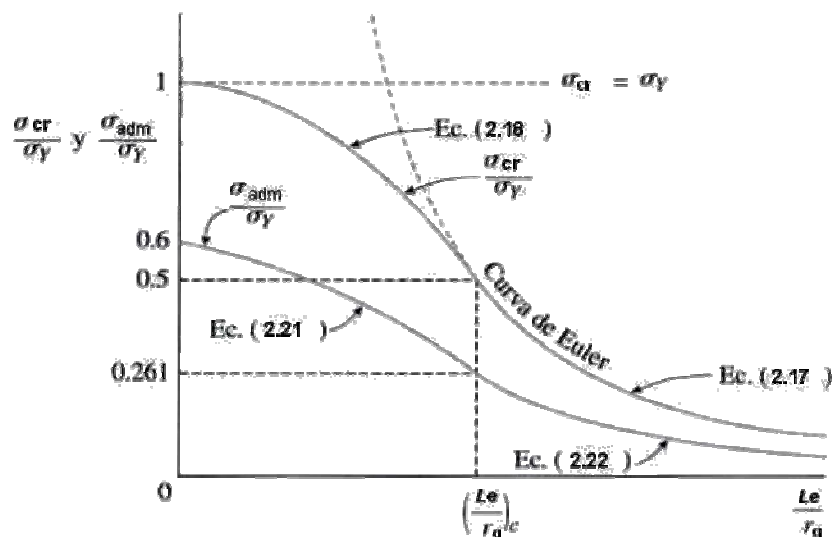


Fig. 2.10. Tensiones máximas y admisibles para el diseño de columnas según la AISC.

Ahora, las tensiones admisibles se obtienen dividiendo tensiones críticas entre los factores de seguridad correspondientes:

$$\sigma_{adm} = \frac{1}{\nu_1} \left[1 - \frac{(L_e/r_g)^2}{2(L_e/r_g)_C^2} \sigma_Y \right] \quad \frac{L_e}{r_g} \leq \left(\frac{L_e}{r_g} \right)_C \quad (2.22)$$

$$\sigma_{adm} = \frac{1}{2\nu_2} \left[\frac{(L_e/r_g)_C^2}{(L_e/r_g)^2} \sigma_Y \right] \quad \frac{L_e}{r_g} \geq \left(\frac{L_e}{r_g} \right)_C \quad (2.23)$$

Estas tensiones admisibles están trazadas en la Fig. 2.10 en forma

$$\sigma_{adm}/\sigma_Y \quad \text{vs} \quad L_e/r_g.$$

Como síntesis, en la Tabla 2.7 se comparan las formulaciones resultantes de análisis experimentales de diversos autores mediante curvas de σ_{cr} vs L_e/r_g generadas para una columna se sección circular de 30mm de diámetro cuyos valores de tensión tomados son:

Tensión de fluencia $\sigma_Y = 340\text{MPa}$,

Tensión última: $\sigma_{ult} = 540\text{MPa}$.

Tensión proporcional: $\sigma_{pl} = 250\text{MPa}$.

Autor	Expresiones para tensión máxima admisibles	Rango de aplicación	Curvas
Robertson	$\eta = 0.003 \frac{L}{r_g}$ $\sigma_{cr} = 0.5 \left[\sigma_Y + (1 + \eta) \sigma_E \right] - \sqrt{0.25 \left[\sigma_Y + (1 + \eta) \sigma_E \right]^2 - \sigma_Y \sigma_E}$	Elástico e inelástico	<p>The graph plots critical stress (MPa) on the y-axis (0 to 350) against the slenderness ratio (Le/radio de giro) on the x-axis (0 to 300). It shows several curves: Euler (solid black), Tetmajer (solid green), AISC/factor (dashed black), AISC (solid black), Robertson (solid yellow), Dutheil (dashed yellow), and Rankine (solid grey). A vertical dashed line at Le/radio de giro ≈ 100 separates the 'Rango inelástico' (left) from the 'Rango elástico' (right). A horizontal dashed line at σ ≈ 250 MPa is labeled 'Limite elástico'. A vertical dashed line at Le/radio de giro ≈ 80 is labeled '(Le/r)c para AISC'.</p>
Dutheil	$\eta = \frac{0.3 \sigma_Y}{\pi^2 E} \left(\frac{L}{r_g} \right)^2$ $\sigma_{cr} = 0.5 \left[\sigma_Y + (1 + \eta) \sigma_E \right] - \sqrt{0.25 \left[\sigma_Y + (1 + \eta) \sigma_E \right]^2 - \sigma_Y \sigma_E}$	Elástico e inelástico	
Tetmajer	$\sigma_{cr} = \sigma_{max} = \sigma_{Rot} - a \cdot \lambda, \quad a = 3,53$ <p>para acero</p>	60 < L/r _g < 100	
Rankine	$\sigma_{cr} = \sigma_{max} = \frac{\sigma_{adm}}{1 + a \cdot \lambda^2}, \quad \sigma_{adm} = 140e6, \quad a = 1e-4$ <p>para acero</p>	70 < L/r _g < 120	
AISC	$\sigma_{adm} = \frac{1}{\eta_1} \left[1 - \frac{(L_e/r_g)^2}{2(L_e/r_g)_c^2} \right] \sigma_Y, \quad \left(\frac{L_e}{r_g} \right)_c = \pi \sqrt{\frac{2E}{\sigma_Y}}$ $\eta_1 = \frac{5}{3} + \frac{3(L_e/r_g)}{8(L_e/r_g)_c} - \frac{(L_e/r_g)^3}{8(L_e/r_g)_c^3}$	$\frac{L_e}{r_g} \leq \left(\frac{L_e}{r_g} \right)_c$	
	$\sigma_{adm} = \frac{1}{2\eta_2} \left[\frac{(L_e/r_g)_c^2}{(L_e/r_g)^2} \right] \sigma_Y, \quad \left(\frac{L_e}{r_g} \right)_c = \pi \sqrt{\frac{2E}{\sigma_Y}}$ $\eta_2 = \frac{23}{12} \approx 1.92$	$\frac{L_e}{r_g} > \left(\frac{L_e}{r_g} \right)_c$	

Tabla 2.7 Formulaciones basadas en la experimentación.